DS n°2 : Calcul et nombres complexes

*Durée : **3** heures. Calculatrices non autorisées.*
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre souhaité.

Exercice 1

On pose $E = \mathbb{C}\backslash\{1\}$ et

$$\begin{aligned} f : E &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{z-1}{1-\overline{z}} \end{aligned}$$

1) Montrer que $\forall z \in E \quad |f(z)| = 1$.

2) Résoudre l'équation $f(z) = 1$ d'inconnue $z \in E$.

3) L'application f est-elle injective ? Surjective ? Justifier.

4) Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. Montrer que $f(e^{i\,\theta}) = e^{i\,\theta}$.

5) En déduire que $f(E) = \mathbb{U}$.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les expressions suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{2^{k-1}}$

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \prod_{j=0}^{1} (k+j)$

3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$ *(Le résultat final ne doit contenir aucun $\sum$, Re, Im...)*

Tournez la page S.V.P.

Problème

L'objectif de ce problème est de déterminer deux valeurs exactes, pour $n = 8$ et $n = 12$, du nombre réel défini pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$\alpha_n = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

On montre ensuite une propriété de α_7.

Calcul de α_{12}. On considère les deux nombres complexes

$$p = \sqrt{3} - i \quad \text{et} \quad q = pe^{i\,\frac{\pi}{4}}$$

1) Déterminer les formes exponentielles de p et q.

2) En utilisant la forme algébrique de $e^{i\,\frac{\pi}{4}}$, en déduire que

$$\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\,\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

3) En déduire la valeur de α_{12}.

Calcul de α_8. On considère l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

$$z^2 = 1 + i$$

dont on note S l'ensemble des solutions.

4) Mettre $1 + i$ sous forme exponentielle puis déterminer les éléments de S sous forme exponentielle.

5) Résoudre à nouveau l'équation en cherchant les solutions sous forme algébrique. En déduire une autre expression de S.

6) Conclure que

$$\alpha_8 = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

Calcul de α_7. On considère le polynôme de la variable complexe $\Phi(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6$ et on pose $\omega = e^{2i\,\frac{\pi}{7}}$.

7) Justifier que $\Phi(\omega) = 0$ et que $\omega + \dfrac{1}{\omega} = 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)$.

8) Montrer que

$$\omega^{-3}\Phi(\omega) = \left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)^3 + \left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)^2 - 2\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right) - 1$$

9) En déduire que $2\cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)$ est une racine du polynôme $\Theta(z) = z^3 + z^2 - 2z - 1$.

On admettra dans la suite que Θ admet une unique racine réelle positive, que l'on note β.

10) Exprimer α_7 en fonction de β.